<u>הוכחות אלמנטריות</u>

אנא קראו בעיון את הדיון בעמ׳ 1-15. אם דבר-מה אינו ברור, דונו בכך עם חבריכם. אם עדיין נותרו אי-בהירויות – דברו אתי.

איך כותבים הוכחה אלמנטרית?

בכל נקודה בהוכחה אנחנו עושים אחד מ**שלושה** דברים:

(א) משתמשים ב**תבנית** הוכחה קבועה.

(ב) **מעתיקים** מתוך הגדרה, כלל או משפט שנלמדו בקורס (או נתונים בשאלה עצמה).

(ג) **נעזרים בנתונים** ובמשפטים ידועים כדי להוכיח את הטענה שצריך להוכיח באותה נקודה.

<u>שאלה</u>**:** איך יודעים איזו משלוש הפעולות הללו לבצע בנקודה מסוימת בהוכחה?

<u>תשובה</u>:

(1) מזהים את ה**טענה שצריך להוכיח** (להלן – **טש״ל**) בנקודה זו:

- הטש״ל בתחילת ההוכחה היא פשוט מה שנתבקשתם להוכיח.
- הטש״ל **משתנה** במהלך ההוכחה.

(2) ניסוח הטש״ל **מכתיב** את דרך הפעולה.

בעמודים הבאים נסביר את האמור לעיל ביתר פירוט.

(א) מתי ואיך משתמשים בתבנית?

נניח שהטש"ל הוא טענה שהמילה הראשית שלה היא אחת המילים הלוגיות ("וגם", "אם-אזי", "אם ורק אם", "או", "לכל", "קיים").

במקרה זה, אנו **חייבים** להשתמש בתבנית הוכחה **קבועה** - לכל מילה לוגית יש תבנית המתאימה לה (ראו פירוט בטבלת התבניות בעמוד 4).

גם להוכחת טענות הכלה ושוויון-קבוצות משתמשים בדרך-כלל בתבנית קבועה.

השימוש בתבנית **משנה את הטש"ל** ולעיתים יוצר נתון חדש.

אנו **מכריזים במפורש** על הטש"ל החדשה ועל הנתון החדש (אם יש כזה).

את התבניות יש **ללמוד בעל-פה**.

דוגמה 1: נניח ובנקודה מסוימת בהוכחה עלינו להוכיח את הטענה הבאה:

"אם f גזירה בנקודה x, אז f רציפה ב-x" (כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו-$x\in\mathbb{R}$).

זאת היא טענת "אם-אזי". עפ"י התבנית המתאימה לטענות "אם-אזי" (שורה (ג) בטבלת התבניות שבעמוד 4), כדי להוכיח טענה כזו עלינו:

- **להניח** את הרישא של משפט ה"אם-אזי";
- **להוכיח** את הסיפא של המשפט.

לכן, בשורה הבאה של ההוכחה נכתוב:

"נניח: f גזירה ב-x. נראה: f רציפה ב-x",

ומכאן נמשיך בהוכחה.

שימו לב:

- השימוש בתבנית משנה את הטש"ל. הטש"ל החדשה היא "f רציפה ב-x." (במקום: ""אם f גזירה בנקודה x, אז f רציפה ב-x"). במילים המודגשות בירוק לעיל הכרזנו במפורש על הטש"ל החדשה.
- כעת עומד לרשותנו נתון נוסף: "f גזירה ב-x." במילים המודגשות בצהוב לעיל הכרזנו במפורש על הנתון החדש.
- השימוש בתבנית הוא **מכאני** לגמרי, **ואינו** מחייב אותנו להכיר את ההגדרות של "פונקציה גזירה" או של "פונקציה רציפה". הגדרות אלה תהיינה רלבנטיות רק בהמשך ההוכחה.

דוגמה 2: נניח והטש"ל בנקודה מסוימת היא "קיימת $f: A\times B\to A'\times B'$ חד-חד-ערכית ועל."

המילה הראשית של טענה זו היא "קיים". לפי התבנית המתאימה לטענות קיום (שורה (ו) של טבלת התבניות), **חייב** המשך ההוכחה שלנו להתחלק לשני שלבים:

שלב 1: בשורה הבאה נכתוב:

"עלינו להגדיר f כך ש- $f: A\times B\to A'\times B'$, f חח"ע ו- f על."

כעת נגדיר את f . ודאי נצטרך לעשות שימוש בנתונים כלשהם אודות A, B, A', B' כדי להגדיר אותה.

שלב *2*: אחרי שנסיים להגדיר את f , נכתוב:

"כעת נראה: $f: A\times B\to A'\times B'$, f חח"ע ו- f על,"

ומכאן נמשיך בהוכחה.

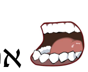
שימו לב:

- בשלב 1 יש לנו **יעד** חדש: להגדיר את f.[1] בשלב 2 משתנה הטש"ל. הטש"ל החדשה היא:
"$f: A\times B\to A'\times B'$, f חח"ע ו- f על." (במקום: "קיימת $f: A\times B\to A'\times B'$ חח"ע ועל.")
- בשלב 2 עומד לרשותנו נתון נוסף: ההגדרה של f שנתנו בשלב 1.
- השימוש בתבנית הוא **מכאני** לגמרי: **איננו** חייבים לדעת מהי "פונקציה חח"ע ועל" **ואיננו** זקוקים לשום נתון ביחס ל- A, B, A', B' , כדי לדעת שההוכחה חייבת להתבצע בשני שלבים כמתואר לעיל. לנתונים ולהגדרות נזדקק רק כשנפנה לביצוע *בפועל* של שלבים 1 ו-2.

[1] אי-אפשר לדבר כאן על טש"ל חדשה, שכן בנקודה זו לא צריך להוכיח דבר, אלא **להגדיר** את הפונקציה f .

טבלת התבניות (α ו- β מציינות טענות מתמטיות כלשהן. A ו- B הן קבוצות):

	הטש"ל	מה כותבים?	הטש"ל **החדשה**
(א)	$\alpha \wedge \beta$	"נראה תחילה α." [כאן מוכיחים את α, ואח"כ כותבים:] "עתה נראה β."	α, ואחרי שהוכחנו אותו: β
(ב)	$\alpha \Leftrightarrow \beta$	"נראה תחילה $\alpha \Rightarrow \beta$." [כאן מוכיחים את $\alpha \Rightarrow \beta$, ואח"כ כותבים:] עתה נראה $\beta \Rightarrow \alpha$.	$\alpha \Rightarrow \beta$, ואחרי שהוכחנו אותו: $\beta \Rightarrow \alpha$
(ג)	$\alpha \Rightarrow \beta$	"נניח: α. נראה: β."	β
(ד)	$\alpha \vee \beta$	"באופן שקול אפשר להראות $\neg\alpha \Rightarrow \beta$. לכן, נניח: $\neg\alpha$ ונראה: β."	β
(ה)	$\forall x.\alpha(x)$	"יהי x. נראה: $\alpha(x)$"	$\alpha(x)$
(ו)	$\exists x.\alpha(x)$	"עלינו **להגדיר** x כך שיתקיים $\alpha(x)$." [כאן מגדירים את x, ואח"כ כותבים:] "נראה עתה: $\alpha(x)$."	הגדרה של x, ואחרי שהגדרנו אותו: $\alpha(x)$
(ז)	$\forall x\left(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)\right)$	"יהי x כך ש- $\alpha(x)$. נראה: $\beta(x)$."	$\beta(x)$
(ח)	$A \subseteq B$	"יהי $a \in A$. נראה: $a \in B$."	$a \in B$
(ט)	$A = B$	"נראה תחילה $A \subseteq B$." [כאן מוכיחים את $A \subseteq B$, ואח"כ כותבים:] "עתה נראה $B \subseteq A$."	$A \subseteq B$, ואחרי שהוכחנו אותו: $B \subseteq A$

 אנא למדו **בעל-פה** את טבלת התבניות.

(ב) מתי ואיך מעתיקים?

נניח שכדי להבין את הטש"ל, צריך להכיר הגדרה, כלל או משפט מסוימים.

במקרה זה, אנו **מעתיקים** מתוך ההגדרה/כלל/משפט הרלבנטיים, תוך **הצבה** של הסמלים המתאימים להוכחה הנוכחית.

כתוצאה מכך **משתנה ניסוח הטש"ל**.

אנו **מכריזים במפורש** על הנוסח החדש של הטש"ל וכן על ההגדרה/כלל/משפט מתוכם העתקנו.

את ההגדרות, הכללים והמשפטים העיקריים שנלמדו בקורס יש **ללמוד בעל-פה**.

דוגמה 3: נניח ובנקודה מסוימת במהלך ההוכחה עלינו להוכיח את הטענה: "$x \in A \setminus (B \cup C)$".

אי-אפשר להבין טענה זו בלא להכיר את ההגדרה של הפרש קבוצות. לפי הגדרה זו:

לכל שתי קבוצות X, Y ולכל x, $x \in X \setminus Y \Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin Y)$.

במקרה שלנו עלינו להציב $X := A$, $Y := B \cup C$. נקבל כי הטענה $x \in A \setminus (B \cup C)$ שקולה לטענה $x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$. לכן, בשורה הבאה של ההוכחה נכתוב כך:

"מהגדרת הפרש קבוצות, עלינו להראות למעשה: $x \in A$ וגם $x \notin (B \cup C)$",

ומכאן נמשיך בהוכחה.

שימו לב:

- ניסוח הטש"ל משתנה. הנוסח החדש הוא: "$x \in A$ וגם $x \notin (B \cup C)$" (במקום: "$x \in A \setminus (B \cup C)$"). במילים המודגשות בירוק לעיל הכרזנו במפורש על הנוסח החדש.
- במילים המודגשות באדום לעיל, הזכרנו לקורא מתוך איזו הגדרה העתקנו כאן.

דוגמה 4: נניח והטענה שצריך להוכיח בנקודה מסוימת היא "$x \in f^{-1}\left[f\left[X\right]\right]$" (בהקשר בו ידוע ש-$f$ היא פונקציה ו-$f\left[X\right]$ היא קבוצה).

איננו יכולים להבין טענה זו, אם איננו מכירים את ההגדרה של $f^{-1}\left[f\left[X\right]\right]$. עיון ב*דף פונקציות*, עמ' 1, הגדרה (b), מלמד אותנו שלכל פונקציה σ ולכל קבוצה Y, $\sigma^{-1}\left[Y\right]$ היא *קבוצת המקורות* של Y לפי σ. קבוצה זו מוגדרת כך: $\sigma^{-1}\left[Y\right] := \left\{a \in \mathrm{dom}(\sigma) | \sigma(a) \in Y\right\}$.

במקרה שלנו עלינו להציב $\sigma := f$, $Y := f\left[X\right]$. נקבל:

$$f^{-1}\left[f\left[X\right]\right] = \left\{a \in \mathrm{dom}(f) | f(a) \in f\left[X\right]\right\}.$$ [2]

לכן, בשורה הבאה של ההוכחה נכתוב:

"עפ"י ההגדרה של קבוצת מקורות תחת פונקציה, $f^{-1}\left[f\left[X\right]\right] = \left\{a \in \mathrm{dom}(f) | f(a) \in f\left[X\right]\right\}$.

מכאן שעלינו להוכיח למעשה: $x \in \left\{a \in \mathrm{dom}(f) | f(a) \in f\left[X\right]\right\}$",

ואח"כ נמשיך בהוכחה.

שימו לב שוב:

- הטש"ל משתנה. הטש"ל החדשה היא: $x \in \left\{a \in \mathrm{dom}(f) | f(a) \in f\left[X\right]\right\}$ (במקום $x \in f^{-1}\left[f\left[X\right]\right]$). הכרזנו במפורש על שינוי הטש"ל.
- הכרזנו במפורש על ההגדרה בה עשינו שימוש: ההגדרה של קבוצת מקורות.

דוגמה 5: נניח והטש"ל בנקודה מסוימת היא: "$x \in \left\{a \in \mathrm{dom}(f) | f(a) \in f\left[X\right]\right\}$" (בדיוק הטש"ל שאליה הגענו *בסוף דוגמה 4*). זו טענת שייכות לקבוצה עם תנאי-קבלה (ראו *דף סוגי קבוצות*, עמ' 3).

כדי להבין טענה זו, עלינו להכיר את הכלל לשייכות לקבוצה עם תנאי-קבלה (ראו *דף סוגי קבוצות*, עמ' 3).

[2] שימו לב: כדי לבצע את ההצבה אין שום צורך להבין **איזו** קבוצה מציין הסימן $f\left[X\right]$.

לפי כלל זה, אם $\{s\in S\,|\,\varphi(s)\}$ היא קבוצה כלשהי עם תנאי-קבלה ו- t הוא אובייקט מתמטי כלשהו,

אז $t\in\{s\in S\,|\,\varphi(s)\}$ אמ"מ $t\in S$ והתנאי $\varphi\left(t/s\right)$ מתקיים.

במקרה שלנו עלינו להציב: $s:=a$, $S:=\mathrm{dom}(f)$ ותנאי הקבלה $\varphi(a)$ הוא "$f(a)\in f\left[X\right]$." לכן,

$\varphi\left(x/a\right)$ הוא התנאי "$f(x)\in f\left[X\right]$" (החלפנו את a ב- x). נקבל:

$x\in\{a\in\mathrm{dom}(f)\,|\,f(a)\in f\left[X\right]\}$ אמ"מ $x\in\mathrm{dom}(f)$ וגם $f(x)\in f\left[X\right]$.

לכן, בשורה הבאה של ההוכחה נכתוב:

"עלינו להראות למעשה: $x\in\mathrm{dom}(f)$ וגם $f(x)\in f\left[X\right]$",

ומכאן נמשיך בהוכחה.

(ג) מתי נעזרים בנתונים?

כאשר: (1) הטש"ל **אינה** טענה שהמילה הראשית שלה היא מילה לוגית או טענת-הכלה או שוויון קבוצות (ולכן, אי-אפשר להשתמש בתבנית קבועה); וגם (2) **אין** הגדרה/כלל/משפט נוספים שאנו יכולים להעתיק מתוכם כדי לשנות את ניסוח הטש"ל –

בנקודה זו מוכיחים את הטש"ל בעזרת הנתונים ובעזרת משפטים ידועים.

<u>שאלה</u>: מדוע *מתחילים* בשימוש בתבניות ובהעתקה, ורק *כשאין* אפשרות להמשיך בכך, נעזרים בנתונים?

<u>שתי תשובות</u>: (1) השימוש בתבניות הוא חלק מן ההגדרה של "הוכחה נכונה". הוכחה שאינה משתמשת בתבניות, במקום שאפשר לעשות זאת, **אינה הוכחה** למעשה.

(2) כל העתקה הופכת את הטש"ל שלנו ל**פשוטה יותר וקלה יותר להבנה**, ולכן קלה יותר להוכחה.

דוגמה 3-המשך: בתחילת דוגמה 3 היה הטש"ל $x \in A \setminus \left(B \cup C\right)$. אחרי שהעתקנו מתוך הגדרת הפרש קבוצות, גילינו שכדי להוכיח טש"ל זו, מספיק להוכיח (בנפרד) שתי טענות אחרות, שכל אחת מהן קלה יותר להבנה: $x \in A$ ו- $x \notin \left(B \cup C\right)$.

בשורה משמחת: ברוב ההוכחות בקורס זה, בנקודות בהן עלינו להיעזר בנתונים, הטש"ל כל-כך פשוטה, שקל לראות איך להוכיח אותה מן הנתונים.

<u>שאלה</u>: מהם המקרים הנפוצים ביותר בהם נצטרך להיעזר בנתונים?

<u>תשובה</u>:

<u>המקרים העיקריים בהם נעזרים בנתונים</u>:

(1) כאשר הטענה שצריך להוכיח היא מאחת הצורות הבאות:

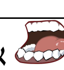
(א) " $x \in X$ " (או שלילתה: " $x \notin X$ ")

באשר X היא **קבוצה ללא-הגדרה** (ראו *דף סוגי קבוצות*, עמ' 1).

(א) " $x = y$ " (או שלילתה: " $x \neq y$ ")

באשר x ו- y **אינם** קבוצות (או לא ידוע לנו אם הם קבוצות).

(2) כאשר עלינו **להגדיר** עצם מתמטי שאינו נתון לנו (בד"כ לשם הוכחת טענת קיום).

 אנא למדו **בעל-פה** את המקרים העיקריים בהם נעזרים בנתונים.

את עיקר דיוננו עד כה אפשר לסכם בכלל הבא:

<u>הכלל היסודי של הוכחות אלמנטריות</u>

הטענה שצריך להוכיח בנקודה מסוימת בהוכחה **מכתיבה** לנו את הפעולה שיש לבצע:

(א) אם המילה הראשית של הטש"ל היא מילה לוגית – אנו משתמשים בתבנית המתאימה לה.

(ב) אם כדי להבין את הטש"ל יש להכיר הגדרה, כלל או משפט מסוימים – אנו מעתיקים מתוך ההגדרה/כלל/משפט הרלבנטיים.

(ג) **רק** אם אי-אפשר להשתמש בתבנית או להעתיק - נעזרים בנתונים ובמשפטים ידועים.

אנא למדו **בעל-פה** את הכלל היסודי של הוכחות אלמנטריות.

<u>שאלה</u>: נניח והגעתי לנקודה בה עליי להיעזר בנתונים, איך אני עושה את זה בתכל'ס?

<u>תשובה חלקית</u>: היעזרות בנתונים עשויה לדרוש הבנה ויצירתיות. לכן, נוכל להציג רק תשובה *חלקית* לשאלה. יש **שלוש פעולות עיקריות** שאנו עושים בעת שאנו נעזרים בנתונים בהוכחה:

(א) מנתחים את הנתון ע"י **העתקה** מתוך הגדרה/כלל/משפט רלבנטיים.

(ב) מ**גדירים עצם מתמטי** חדש.

(ג) משתמשים ב**כללי-היסק** כדי לגזור מסקנות חדשות מהנתונים.

אנו מנתחים את הנתון ע"י העתקה בדיוק כשם שהיינו עושים לו היה טש"ל:

דוגמה 6: נניח שבנקודה מסוימת בהוכחה **נתון** לנו $x \in A \setminus (B \cup C)$, ועלינו להיעזר בנתון זה.

אי-אפשר להבין את הנתון בלא להכיר את ההגדרה של הפרש קבוצות. אם נעתיק מתוך הגדרה זו, בדיוק כפי שעשינו בדוגמה 3 (עמ' 5), נקבל כי הטענה $x \in A \setminus (B \cup C)$ שקולה לטענה $x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$. לכן, בשורה הבאה של ההוכחה נכתוב כך:

"מהגדרת הפרש קבוצות, הנתון פירושו למעשה: $x \in A$ וגם $x \notin (B \cup C)$",

ומכאן נמשיך בהוכחה.

הגדרת עצמים חדשים נידונה ב*דף הגדרת עצמים*

אופן השימוש בכללי-היסק מוסבר ב*דף כללי היסק*.

דוגמה 6: הוכחה מפורטת

להלן טענה והחצי הראשון של הוכחה עבורה. אנא קראו אותה בעיון.

טענה: תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. אז $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$.

(חצי) הוכחה:

(0)	תהיינה A,B,C קבוצות. עלינו להראות: $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$.
(1)	כדי להוכיח את שוויון הקבוצות, נראה הכלה כפולה.
(2)	נראה תחילה: $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\cup C)$.
(3)	יהי $x\in(A\setminus B)\setminus C$. נראה: $x\in A\setminus(B\cup C)$.
(4)	לפי הגדרת הפרש קבוצות, עלינו להראות למעשה: $x\in A$ וגם $x\notin(B\cup C)$.
(5)	זאת היא טענת "וגם". כדי להוכיח אותה, נראה תחילה $x\in A$ (ואח"כ נראה $x\notin(B\cup C)$).
(6)	נזכור כי הנחנו: $x\in\left((A\setminus B)\setminus C\right)$.
(7)	עפ"י הגדרת הפרש קבוצות, הנתון פירושו: (א) $x\in A\setminus B$ וגם (ב) $x\notin C$.
(8)	נשתמש שוב בהגדרת הפרש קבוצות, כדי להסיק מ-(א): $x\in A$ וגם $x\notin B$.
(9)	קיבלנו בפרט $x\in A$, כנדרש.
(10)	עתה נראה $x\notin B\cup C$.
(11)	כלומר נראה: $\neg\left(x\in B\cup C\right)$.
(12)	מהגדרת איחוד, $x\in B\cup C$ אמ"מ $\left(x\in B\vee x\in C\right)$. לכן עלינו להראות למעשה: $\neg\left(x\in B\vee x\in C\right)$.
(13)	לפי כללי דה-מורגן זה שקול ל: $x\notin B\wedge x\notin C$.
(14)	זאת היא טענת "וגם". כדי להוכיח אותה, נראה תחילה $x\notin B$ (ואח"כ נראה $x\notin C$).
(15)	כזכור, מן הנתון נובע $x\in A\setminus B$, וראינו כבר שמכך נובע $x\in A$ וגם $x\notin B$.
(16)	בפרט נקבל $x\notin B$, כנדרש.

(17)	נותר עוד להראות $x \notin C$.
(18)	אך $x \notin C$ הוא בדיוק (ב) למעלה.
(19)	בכך מסתיימת הוכחת ההכלה $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$. בכדי לסיים את ההוכחה, נראה עכשיו את ההכלה ההפוכה : $(A \setminus B) \setminus C \supseteq A \setminus (B \cup C)$.

כאן צריכה ההוכחה להמשיך, אך אנו נסתפק בזאת. ■

<u>שאלה 1</u>

קראו שוב את ההוכחה האחרונה, וביחס לכל שורה בהוכחה עשו את הדברים הבאים :

- זהו מהי הטענה שצריך להוכיח בשורה זו.
- הסבירו כיצד **מכתיבה** הטש״ל בשורה זו את הפעולה הבאה שלנו : האם להשתמש בתבנית, להעתיק או להיעזר בנתונים?
- אם הטש״ל בשורה זו מכתיבה שימוש בתבנית קבועה, ציינו באיזו תבנית יש לעשות שימוש (ציינו גם את מספר השורה שלה בטבלת התבניות). האם השימוש בתבנית יוצר נתון חדש?
- אם הטש״ל מכתיבה העתקה מתוך הגדרה, ציינו מתוך איזו הגדרה יש להעתיק. רשמו את הנוסח הכללי של ההגדרה. הסבירו אילו סמלים יש להציב במקום אילו סמלים, כדי להשתמש בהגדרה בהקשר הנוכחי (כפי שעשינו בדוגמאות 3-5).
- אם הטש״ל מכתיבה היעזרות בנתונים, נסו להסביר כיצד נעזרנו בהם.

(בעמוד הבא תמצאו פתרון לשאלה, אך נסו תחילה לענות עליה בעצמכם.)

שימו :

להוכחה שהוספנו לה את כל המידע הנדרש בשאלה 1 נקרא בקורס העזר שלנו **הוכחה עם הסברים.**

דוגמה להוכחה עם הסברים - בעמוד הבא.

פתרון שאלה 1 – דוגמה להוכחה עם הסברים

טענה: תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. אז $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$.

הוכחה עם הסברים (מחוץ לשורות הטבלה – ההסברים, בתוכן – ההוכחה עצמה):

מתחילים את ההוכחה בחזרה על הנתונים ובניסוח מפורש של מה שנתבקשנו להוכיח:

(0)	תהיינה A,B,C קבוצות. עלינו להראות: $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$.

- הטש"ל בפתיחת ההוכחה היא $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$.

- הטש"ל היא טענת שוויון בין קבוצות, ולפי שורה (ט) ב*טבלת התבניות*, כדי להוכיח שוויון קבוצות מראים הכלה כפולה.

(1)	כדי להוכיח את שוויון הקבוצות, נראה הכלה כפולה.
(2)	נראה תחילה: $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\cup C)$.

- הטש"ל השתנתה. הטש"ל החדשה: $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\cup C)$.

- הטש"ל היא טענת הכלה. לפי שורה (ח) ב*טבלת התבניות*, עלינו לקחת אבר כלשהו באגף המוכל ולהראות שהוא שייך לאגף המכיל.

(3)	יהי $x\in(A\setminus B)\setminus C$. נראה: $x\in A\setminus(B\cup C)$.

- השימוש בתבנית עבור הכלה יצר נתון חדש: $x\in(A\setminus B)\setminus C$.

- הטש"ל החדשה: $x\in A\setminus(B\cup C)$. בטש"ל זה דנו בדוגמה 3. ראו הדיון שם.

(4)	לפי הגדרת הפרש קבוצות, עלינו להראות למעשה: $x\in A$ וגם $x\notin(B\cup C)$.

- הטש"ל עכשיו: $x\in A$ וגם $x\notin(B\cup C)$.

- זו טענת "וגם". לפי שורה (א) ב*טבלת התבניות*, כדי להוכיח טענת "וגם" עלינו להוכיח בנפרד כל אחד מן האגפים של ה"וגם".

(5)	זאת היא טענת "וגם". כדי להוכיח אותה נראה תחילה $x\in A$ (ואח"כ נראה $x\notin(B\cup C)$).

- הטש"ל עכשיו: $x\in A$.

- הטש"ל אינה כוללת מילה לוגית ואינה טענת הכלה/שוויון קבוצות. לכן, לא נוכל להשתמש בתבנית.

- כיוון ש-A היא קבוצה ללא הגדרה (A היא מה שכינינו משתנה-קבוצה בעמ' 1 של*דף סוגי קבוצות*), לא נוכל להעתיק מתוך הגדרה או כלל כלשהם כדי לשנות את הטש"ל.

- לכן, עלינו להיעזר בנתונים (ברשימת המקרים העיקריים בהם נעזרים בנתונים, עמ' 8, זהו (1)(א)).

- קריאה חוזרת של שורות 0-5 תגלה שעד כה עומד לרשותנו נתון יחיד: $x \in (A \setminus B) \setminus C$ (ראו שורה

3). הצעד הבא יהיה לצטט את הנתון, כדי לרענן את זכרונו של הקורא ואת זכרוננו שלנו:

(6)	נזכור כי הנחנו: $x \in ((A \setminus B) \setminus C)$.

- כדי להבין את הנתון הזה, יש להכיר את ההגדרה של הפרש קבוצות.

- נטפל בנתון בדיוק כשם שהיינו מטפלים בו לו היה הטענה שצריך להוכיח (במקום **נתון**), כלומר – נשנה את הניסוח שלו ע"י **העתקה** מהגדרה זו.

- עפ"י הגדרת הפרש קבוצות: לכל שתי קבוצות X, Y ולכל x, $x \in X \setminus Y$ אמ"מ $(x \in X \wedge x \notin Y)$.

- במקרה שלנו עלינו להציב $X := (A \setminus B)$, $Y := C$. נקבל כי הטענה $x \in ((A \setminus B) \setminus C)$ שקולה לטענה $x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C$.

(7)	עפ"י הגדרת הפרש קבוצות, הנתון פירושו: (א) $x \in A \setminus B$ וגם (ב) $x \notin C$.

- ניתחנו את הנתון וקיבלנו שני נתונים חדשים: $x \in A \setminus B$ ו- $x \notin C$.

- כיוון ש- C היא משתנה-קבוצה (ראו *דף סוגי קבוצות*, עמ' 1), איננו יכולים להמשיך ולנתח את $x \notin C$.

את הטענה $x \in A \setminus B$ נוכל להמשיך ולנתח – שוב לפי הגדרת הפרש קבוצות:

(8)	נשתמש שוב בהגדרת הפרש קבוצות, כדי להסיק מ-(א): $x \in A$ וגם $x \notin B$.

אם מן הנתון נובע $x \in A$ וגם $x \notin B$, אז ודאי נובע ממנו $x \in A$. כדי לבטא עובדה זו, משתמשים המתמטיקאים בדרך-כלל במילה "בפרט":

(9)	קיבלנו בפרט $x \in A$, כנדרש.

הוכחנו $x \in A$. כעת נראה $x \notin (B \cup C)$, כדי לסיים את הוכחת טענת ה"וגם" בשורה 4.

(10)	עתה נראה $x \notin B \cup C$.

- הטש"ל החדשה היא: $x \notin B \cup C$.

- נזכיר לקורא שהסימן '$\notin$' משמש רק כקיצור:

(11)	כלומר נראה: $\neg(x\in B\cup C)$.

- הטש"ל החדשה: $\neg(x\in B\cup C)$.

- כדי להבין טענה זו, יש להכיר את ההגדרה של איחוד קבוצות. **נעתיק** מתוך הגדרה זו.

- לפי הגדרה זו, לכל שתי קבוצות X,Y ולכל x, $x\in X\cup Y$ אמ"מ $(x\in X\vee x\in Y)$.

- עלינו להציב $X:=B$ ו- $Y:=C$. נקבל שהטענה $\neg(x\in B\cup C)$ שקולה לטענה $\neg(x\in B\vee x\in C)$.

(12)	מהגדרת איחוד, צריך שנראה: $\neg(x\in B\vee x\in C)$.

- לפנינו טענה שצורתה הלוגית היא $\neg(\alpha\vee\beta)$.

- עפ"י כללי דה-מורגן, הטענה $\neg(\alpha\vee\beta)$ שקולה לטענה $\neg\alpha\wedge\neg\beta$.

- עלינו להציב במקום α את הטענה $x\in B$ ובמקום β את הטענה $x\in C$. נקבל כי הטענה $\neg(x\in B\vee x\in C)$ שקולה לטענה $x\notin B\wedge x\notin C$.

(13)	לפי כללי דה-מורגן זה שקול ל: $x\notin B\wedge x\notin C$.

- הטש"ל החדשה: $x\notin B\wedge x\notin C$.

- זו טענת "וגם". לפי שורה (א) בטבלת התבניות, כדי להוכיח טענת "וגם" עלינו להוכיח בנפרד כל אחד מן האגפים של ה"וגם".

(14)	זאת היא טענת "וגם". כדי להוכיח אותה, נראה תחילה $x\notin B$ (ואח"כ נראה $x\notin C$).

- הטש"ל החדשה: $x\notin B$.

- כיוון ש- B היא משתנה-קבוצה, מקרה (1)(א) ברשימת המקרים העיקריים בהם נעזרים בנתונים (עמ' 8), קובע שיהיה עלינו להיעזר בנתונים כדי להוכיח $x\notin B$.

(15)	כזכור, מן הנתון נובע $x\in A\setminus B$, וראינו כבר שמכך נובע $x\in A$ וגם $x\notin B$.
(16)	בפרט נקבל $x\notin B$, כנדרש.

הוכחנו $x\notin B$, וכעת עלינו לחזור ולהראות $x\notin C$ (כדי לסיים את הוכחת טענת ה"וגם" בשורה 13):

(17)	נותר עוד להראות $x\notin C$.

למעשה, כבר הוכחנו $x \notin C$:

(18)	אך $x \notin C$ הוא בדיוק (ב) למעלה.
(19)	בכך מסתיימת הוכחת ההכלה $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$. בכדי לסיים את ההוכחה, נראה עכשיו את ההכלה ההפוכה: $(A \setminus B) \setminus C \supseteq A \setminus (B \cup C)$.

כאן הפסקנו את ההוכחה. ■

שלד ההוכחה

הגורם מספר אחד לטעויות של סטודנטים בכתיבת הוכחות הוא המחשבה הבאה:

"הוכחה זה מין סיפור כזה שבו **יוצאים מן הנתונים** ומנסים להגיע למה שצריך להוכיח."

עפ"י הכלל היסודי של הוכחות אלמנטריות (עמ' 9), מחשבה זו היא **שקרית** לגמרי:

- יש רק **נקודות מסוימות** בהוכחה בהן מותר לנו להיעזר בנתונים (בדרך-כלל לא בתחילת ההוכחה).

- **רוב** מה שאנו עושים בהוכחה הוא שימוש בתבניות והעתקה.

- כשאנו משתמשים בתבניות או מעתיקים, אנו **מתעלמים לחלוטין** מן הנתונים.

דוגמה 7-המשך: בהוכחה שבדוגמה 7 (עמ' 10), הנקודה הראשונה שבה **מותר** לנו להיעזר בנתונים היא שורה 6. מתוך 20 השורות בהוכחה רק שש שורות (6-9, 15-16, 18) נעזרות בנתון. קראו שוב כל אחת מן השורות האחרות (0-5, 10-14, 17, 19), ותשתכנעו שכלל לא נעזרנו בנתונים בכתיבתן.

שימו :

להוכחה *חלקית* הכוללת רק את השורות בהן משתמשים בתבניות או מעתיקים, אך **אינה** כוללת את השורות בהן נעזרים בנתונים, נקרא בתרגול **שלד-הוכחה.**

דוגמה 7-המשך: אם נשאיר מן ההוכחה בדוגמה 7 רק את השורות 0-5, 10-14, 17, 19, נקבל שלד-הוכחה עבור הטענה $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$.

כדי לכתוב שלד-הוכחה עלינו לדעת בעל-פה את טבלת התבניות (כדי שנוכל להשתמש בהן) ואת ההגדרות, הכללים והמשפטים העיקריים בקורס (כדי שנוכל להעתיק מתוכם).

כאשר אנו יודעים כל זאת בעל-פה – כתיבת שלד-ההוכחה הופכת ל**מכאנית** לגמרי.

הערה: בתשובותיכם לשאלות 2-5, ייתכן ותצטרכו להיעזר בהגדרות הנוגעות לפעולות בקבוצות, ליחסים ולפונקציות.

שאלה 2

הלל הוא סטודנט חרוץ אשר מילא את מחברתו בהוכחות רבות. ואולם, בלילה קרע חתולו השובב של הלל, פליקס, את המחברת, וכל מה שנותר להלל הוא קרעי-נייר שעל כל אחד מהם משפט אחד מתוך הוכחה. בכל אחד מהסעיפים הבאים מצוטט אחד מן הקרעים הללו, וכן מוסבר מה זוכר הלל מן ההקשר הרלבנטי. האם תוכלו לעזור להלל לקבוע מה צריך להיות המשפט **הבא** בהוכחה?[3]

קרע א:

מה כתוב על קרע-הנייר?	"נראה: $R \cap S$ הוא יחס טרנזיטיבי."
מה זוכר הלל מן ההקשר?	הסמלים R ו- S מציינים יחסים. הלל אינו זוכר אם היו נתונים נוספים ביחס ל- R ו- S.
מה יהיה המשפט הבא בהוכחה?	

קרע ב:

מה כתוב על קרע-הנייר?	"נותר עוד להוכיח כי לכל $S \subseteq R$, S הוא אנטי-סימטרי חלש."
מה זוכר הלל מן ההקשר?	הסמל R מציין קבוצה כלשהי. זה כל מה שהלל זוכר.
מה יהיה המשפט הבא בהוכחה?	

קרע ג:

מה כתוב על קרע-הנייר?	"כדי להוכיח זאת, נראה תחילה: $a \in B$"
מה זוכר הלל מן ההקשר?	B היא קבוצה. למיטב זכרונו, לא ניתנה הגדרה של B בשאלה.
מה יהיה המשפט הבא בהוכחה?	

קרע ד:

מה כתוב על קרע-הנייר?	"עפ"י הגדרת האיחוד, עלינו להראות למעשה: $x \in A \cap B$ או $x \in A \cap C$."
מה זוכר הלל מן ההקשר?	שום דבר.
מה יהיה המשפט הבא בהוכחה?	

קרע ה:

מה כתוב על קרע-הנייר?	"יהי $x \in f^{-1}\left[f\left[X\right]\right]$. נראה $x \in X$."
מה זוכר הלל מן ההקשר?	נתון היה: f היא פונקציה ו- $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$. היה עוד נתון ביחס ל- f , אך הלל אינו זוכר מהו. לא היו נתונים נוספים.
מה יהיה המשפט הבא בהוכחה?	

[3] שימו לב: **אינכם** מתבקשים לשחזר את *כל* ההוכחה, אלא רק לנסות לקבוע, מה היה המשפט הבא שלה.

שאלה 3

עבור כל אחת מן הטענות הבאות כתבו **שלד-הוכחה**. כלומר, עליכם לכתוב הוכחה חלקית לטענה ש**אינה** כוללת את השורות בהן נעזרים בנתונים. במקום שורות אלה – השאירו רווח.

(א) $x \in A \cap B$ או $x \in A \cap C$ (באשר A, B, C קבוצות כלשהן).

(ב) $x \in A \cap \left(B \cup C\right)$ (באשר A, B, C קבוצות כלשהן).

(ג) $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$ (באשר A, B, C קבוצות כלשהן).

(ד) $R \cap S$ טרנזיטיבי (באשר R, S יחסים כלשהם).

(ה) $H(f,g)$ היא פונקציה (באשר ידוע כי $H(f,g)$ היא קבוצה).

(ו) קיימת $h:\left(A \times B\right) \to \left(A' \times B'\right)$ שהיא חח״ע ועל (באשר A, B, A', B' קבוצות כלשהן).

שאלה 4

בכל סעיף מהבאים עליכם לכתוב הוכחה **מלאה** לאחת הטענות מן **השאלה הקודמת** בעזרת נתונים מסוימים. כדי לעשות זאת, השתמשו בשלד-ההוכחה שיצרתם בתשובה לשאלה הקודמת, והוסיפו לו רק את השורות בהן נעזרים בנתונים. אל תשנו את השלד עצמו.

(1) טענה **(א)**; בעזרת הנתון $x \in A \cap \left(B \cup C\right)$.

(2) טענה **(א)**; בעזרת הנתונים: $x \in A$ ו- $x \notin \left(\left(A \setminus B\right) \cap \left(A \setminus C\right)\right)$.

(3) טענה **(א)**; בעזרת הנתונים: $x \in A$ ו- $\left(A \setminus B\right) \cap \left(A \setminus C\right) = \varnothing$.

(4) טענה **(ב)**; בעזרת הנתון $x \in \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$.

(5) טענה **(ב)**; בעזרת הנתונים: $\left|\left\{X \in \{A, B, C\} \mid x \in X\right\}\right| = 2$ ו- $x \notin B \cap C$.

(6) טענה **(ה)**; בעזרת הנתונים: $H := \lambda f, g \in \mathbb{N}.\left\{\langle f, g\rangle, \langle g, f\rangle\right\}$ ו- $f, g \in \mathbb{N}$.

(7) טענה **(ה)**; בעזרת הנתונים: $H := \lambda f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}.\left\{\langle f, g\rangle, \langle g, f\rangle\right\}$ ו- $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(8) טענה **(ה)**, בעזרת הנתונים: $H := \lambda f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}.\left\{\langle f(n), g(n)\rangle \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ו- f חח״ע.

שאלה 5

עבור כל אחת מן הטענות הבאות כתבו הוכחה מלאה **בצירוף הסברים** (כמו בפתרון שאלה 1 בעמ׳ 12).

(א) תהיינה A, B, C קבוצות. אזי $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$.

(ב) תהיינה A, B, C קבוצות. אזי $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$.

(ג) נגדיר $H := \lambda A \in P\left(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\right).A \cup \mathbb{N}$. אזי H היא חח״ע.

(ד) תהיינה A,B,A',B' ונניח כי $|A|=|A'|\wedge|B|=|B'|$. אזי קיימת $h:(A\times B)\to(A'\times B')$ שהיא חח״ע ועל.

<u>שאלה 6</u>

כתבו לעצמכם סיכום תמציתי של הדרך הנכונה לכתיבת הוכחה אלמנטרית.

מטרתו של הסיכום: בכל פעם שתרגישו שאתם מתחילים להסתבך בכתיבת הוכחה, עיינו בסיכום והוא יסייע לכם ״לסדר את הראש.״